

Minimización por el método de QUINE-McCLUSKEY

Se tienen dos formas de desarrollar el método de *Quine-McCluskey*: con una combinación **binaria** y una combinación **decimal**. Ambas formas se desarrollarán mediante dos ejemplos, respectivamente.

Combinación BINARIA.

Sea la función:

$$F(A, B, C, D) = \sum_m (1, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 15)$$

La **TABLA 1** presenta la lista de los **minitérminos**, expresados en forma **binaria** e indica el número de **UNOS** que estos contienen:

TABLA 1

m_i	A	B	C	D	# de UNOS
1	0	0	0	1	1
3	0	0	1	1	2
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	2
7	0	1	1	1	3
9	1	0	0	1	2
10	1	0	1	0	2
11	1	0	1	1	3
15	1	1	1	1	4

En la **TABLA 2**, se agrupan los **minitérminos** con el mismo número de **UNOS**.

TABLA 2

# de UNOS	m_i	A	B	C	D
1	1	0	0	0	1
	4	0	1	0	0
2	3	0	0	1	1
	5	0	1	0	1
	9	1	0	0	1
3	10	1	0	1	0
	7	0	1	1	1
4	11	1	0	1	1
	15	1	1	1	1

De la **TABLA 2**, se **combinan** los términos que tienen un solo **UNO** con los que tienen **dos UNOS**, los que tienen **dos UNOS** con los que tienen **tres UNOS** y así sucesivamente.

Dos términos se podrán **combinar** siempre y cuando exista un solo cambio entre ellos; es decir, cuando el lugar en que estén colocados los **UNOS** coincidan.

Por ejemplo, los términos **1** y **3** se **combinan** debido a lo siguiente:

$$\overline{A}BCD + \overline{A}B\overline{C}D = \overline{A}BD(C + \overline{C}) = \overline{A}BD$$

0001 0011 00X1

O sea que entre los términos 1 y 3 se eliminó la variable C. Haciendo lo mismo con los demás términos, se obtiene la **TABLA 3**.

TABLA 3

NIVEL DE AGRUPACIÓN	COMBINACIÓN	A	B	C	D
1-2	1-3	0	0	X	1
	1-5	0	X	0	1
	1-9	X	0	0	1
	4-5	0	1	0	X
2-3	3-7	0	X	1	1
	3-11	X	0	1	1
	5-7	0	1	X	1
	9-11	1	0	X	1
3-4	7-15	X	1	1	1
	11-15	1	X	1	1

Los términos que en su fila tienen $\bar{0}$, son los que se combinaron. Los términos con *, son los que no pudieron combinarse; es decir, aquellos que en su fila no tienen $\bar{0}$. A estos términos se les denomina **IMPLICANTES PRIMOS**.

Para la **TABLA 4**, se combinan los niveles de agrupación 1-2 con 2-3 y 2-3 con 3-4, tomando en cuenta que coincidan tanto las x como los UNOS.

TABLA 4

NIVEL DE AGRUPACIÓN	COMBINACIÓN	A	B	C	D
1-2-3	1-3-5-7	0	x	x	1
	1-3-9-11	X	0	x	1
2-3-4	3-7-11-15	x	x	1	1

Como ya se indicó, los **implicantes primos** son términos que no se combinan con ningún otro, por tanto pueden formar parte de la **función reducida**. Para determinar cuáles de los implicantes primos forman parte de la función reducida, se hace la siguiente tabla, llamada de **implicantes primos**.

TABLA 5. Implicantes primos

*	m_i	1	3	4	5	7	9	10	11	15
a		$\bar{0}$			$\bar{0}$				$\bar{0}$	($\bar{0}$)
b	$\bar{0}$	$\bar{0}$				($\bar{0}$)			$\bar{0}$	
c	$\bar{0}$	$\bar{0}$			$\bar{0}$	$\bar{0}$				
d							($\bar{0}$)	$\bar{0}$		
e			($\bar{0}$)	$\bar{0}$						
a		$\bar{0}$				$\bar{0}$			$\bar{0}$	$\bar{0}$
b	$\bar{0}$	$\bar{0}$					$\bar{0}$		$\bar{0}$	
c								$\bar{0}$	$\bar{0}$	
d			$\bar{0}$	$\bar{0}$						

Obsérvese que en la tabla anterior, se encerraron entre paréntesis las $\bar{0}$ que se encontraron solas en una columna y su fila se proyectó en la parte inferior de la tabla.

Si en los cuatro penúltimos renglones se llenan todas las columnas (última fila), entonces se ha llegado a la **solución mínima**.

Nótese que **c** no tuvo ninguna $\bar{0}$ sola dentro de sus columnas, lo que significa que este **implicante primo** está contenido en los demás; es decir, no forma parte de la **función reducida**.

Por tanto, la función reducida es:

$$F(A, B, C, D) = a + b + d + e$$

Donde:

$$\begin{aligned} a &= XX11 = CD \\ b &= X0X1 = \bar{B}D \\ d &= 101X = A\bar{B}C \\ e &= 010X = \bar{A}B\bar{C} \end{aligned}$$

Finalmente, la **función reducida** es:

$$F(A, B, C, D) = CD + \bar{B}D + A\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C}$$

Combinación DECIMAL

Retomando el problema anterior:

$$F(A, B, C, D) = \sum_m (1, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 15)$$

La **TABLA 1** de la **combinación decimal** es idéntica a la **combinación binaria**. En la **TABLA 2** se **agrupan** los **minitérminos** por su número de **UNOS**:

TABLA 2

# de UNOS	m _i
1	1
	4
2	3
	5
	9
	10
3	7
	11
4	15

Las **TABLAS 3** y **4** se obtienen aplicando las siguientes reglas:

- REGLA 1:** La *diferencia* entre dos *minitérminos* de dos niveles contiguos, debe seguir la regla de *formación* binaria (1, 2, 4, 8, etc.).
- REGLA 2:** El *sustraendo* debe ser menor que el *minuendo*.
- REGLA 3:** Los términos de un nivel se combinan con los del inmediato superior si las *diferencias* son iguales y además se cumplen las **REGLAS 1 y 2**.

Aplicando estas reglas se obtienen las **TABLAS 3 y 4**.

TABLA 3

NIVEL DE AGRUPACIÓN	COMBINACIÓN	DIFERENCIA			
		8	4	2	1
1-2	1-3			x	
	1-5		x		
	1-9	x			
	4-5				
2-3	3-7		x		
	3-11	x			
	5-7			x	
	9-11			x	
	10-11				
3-4	7-11		x		
	11-15		x		

TABLA 4

NIVEL DE AGRUPACIÓN	COMBINACIÓN	DIFERENCIA			
		8	4	2	1
1-2-3	1-3-5-7		x	x	
	1-3-9-11	x		x	
2-3-4	1-3-11-15	x	x		

Pasando a la tabla de *implicantes primos*:

TABLA 5. Implicantes primos

* m_i	1	3	4	5	7	9	10	11	15
a		0			0			0	(0)
b	0	0			(0)			0	
c	0	0		0	0				
d							(0)	0	
e			(0)	0					
a		0			0			0	0
b	0	0			0			0	
d							0	0	
e			0	0					
	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Como la tabla se completó, la *función reducida* es:

$$F(A, B, C, D) = a + b + c + d$$

Los **implicantes primos**, en función de **A, B, C** y **D**, se obtienen de los **minitérminos** que los forman eliminando los lugares donde ocurren las **diferencias**.

*	m_i	A	B	C	D		
a	3	0	0	1	1	xx11	P a = CD
	7	0	1	1	1	xx11	
	11	1	0	1	1	xx11	
	15	1	1	1	1	xx11	
b	1	0	0	0	1	x0x1	P b = $\bar{B}D$
	3	0	0	1	1	x0x1	
	9	1	0	0	1	x0x1	
	11	1	0	1	1	x0x1	
d	10	1	0	1	0	101x	P d = $\bar{A}\bar{B}C$
	11	1	0	1	1	101x	
e	4	0	1	0	0	010x	P e = $\bar{A}\bar{B}C$
	5	0	1	0	1	010x	

Por lo tanto, la **función reducida** es:

$$F(A, B, C, D) = CD + \bar{B}D + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$$

EJEMPLO 1. Determine la expresión **mínima**, como una **suma** de productos, la siguiente función de conmutación, utilizando el método de Quine-McCluskey.

$$F(A, B, C, D) = \sum_m (1 - 3, 5, 9 - 11, 18 - 21, 23, 25 - 27)$$

SOLUCIÓN

TABLA 1

m_i	A	B	C	D	E	# de UNOS
1	0	0	0	0	1	1
2	0	0	0	1	0	1
3	0	0	0	1	1	2
5	0	0	1	0	1	2
9	0	1	0	0	1	2
10	0	1	0	1	0	2
11	0	1	0	1	1	3
18	1	0	0	1	0	2
19	1	0	0	1	1	3
20	1	0	1	0	0	2
21	1	0	1	0	1	3
23	1	0	1	1	1	4
25	1	1	0	0	1	3
26	1	1	0	1	0	3
27	1	1	0	1	1	4

TABLA 2

# de UNOS	m_i				
1	1	$\bar{0}$			
	2		$\bar{0}$		
2	3	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	
	5	$\bar{0}$			$\bar{0}$
	9	$\bar{0}$			

# de UNOS	m_j
	10
	18
	20
3	11
	19
	21
	25
	26
4	23
	27

TABLA 3

NIVEL DE AGRU-PACI3N	COMBINACI3N	DIFERENCIA				
		16	8	4	2	1
1-2	1-3				x	
	1-5			x		
	1-9		x			
	2-3					x
	2-10		x			
	2-18	x				
2-3	3-11		x			
	3-19	x				
	5-21	x				
	9-11				x	
	9-25	x				
	10-11					x
	10-26	x				
	18-19					x
	18-26		x			
20-21					x	
3-4	11-27	x				
	19-23			x		
	19-27		x			
	21-23				x	
	25-27				x	
	26-27					x

TABLA 4

NIVEL DE AGRU-PACI3N	COMBINACI3N	DIFERENCIA				
		16	8	4	2	1
1-2-3	1-3-9-11		x		x	
	2-3-10-11		x			x
	2-3-18-19	x				x
	2-10-18-26	x	x			
2-3-4	3-11-19-27	x	x			
	9-11-25-27	x			x	
	10-11-26-27	x				x
	18-19-26-27		x			x

TABLA 5

NIVEL DE AGRUPACIÓN	COMBINACIÓN	DIFERENCIA					
		16	8	4	2	1	
1-2-3-4	2-3-10-11-18-19-26-27	x	x			x	*a

Pasando a la tabla de *implicantes primos*:

TABLA 6 (Implicantes primos)

* m_i	1	2	3	5	9	10	11	18	19	20	21	23	25	26	27	
a		($\bar{0}$)	$\bar{0}$			($\bar{0}$)	$\bar{0}$	($\bar{0}$)	($\bar{0}$)					($\bar{0}$)	$\bar{0}$	*
b					$\bar{0}$		$\bar{0}$						($\bar{0}$)		$\bar{0}$	*
c	$\bar{0}$		$\bar{0}$		$\bar{0}$		$\bar{0}$									
d											$\bar{0}$	$\bar{0}$				
e									$\bar{0}$			$\bar{0}$				
f										($\bar{0}$)	$\bar{0}$					*
g				$\bar{0}$								$\bar{0}$				
h	$\bar{0}$			$\bar{0}$												
a		$\bar{0}$	$\bar{0}$			$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$					$\bar{0}$	$\bar{0}$	
b					$\bar{0}$		$\bar{0}$						$\bar{0}$		$\bar{0}$	
f										$\bar{0}$	$\bar{0}$					
		$\bar{0}$	$\bar{0}$		$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$		$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	

De la TABLA 6, se observa que la última fila no está completa, ya que los **minitérminos 1, 5 y 23** no están considerados. Además, los *implicantes primos c, d, e, g y h*, no fueron tomados en cuenta en las 3 penúltimas filas.

Tanto los *minitérminos* como los *implicantes primos* mencionados, sirven de base para obtener la TABLA 7.

TABLA 7

* m_i	1	5	23
c	$\bar{0}$		
d			$\bar{0}$
e			$\bar{0}$
g		$\bar{0}$	
h	$\bar{0}$	$\bar{0}$	

En la TABLA 7, se observa que en ninguna de las 3 columnas existe una $\bar{0}$ encerrada en paréntesis, por lo que no se puede hacer ninguna simplificación. Cuando esto ocurre, se aplican los dos teoremas siguientes:

- T.1** En la tabla reducida de *implicantes primos*, cuando la fila **A** contiene los mismos minitérminos que la fila **B**, se dice que **A = B** y son intercambiables; es decir, se puede tomar a cualesquiera de ellas como *implicante primo* que entra a formar parte de la *función reducida*.
- T.2** En la tabla reducida de *implicantes primos*, si la fila **A** contiene los mismos minitérminos que la fila **B**, pero además **A** contiene otros minitérminos distintos a los de

B, se dice que A domina a B, o que $B \dot{\leq} A$. Por tanto, A forma parte de la función reducida.

De la TABLA 7, se observa que d y e contienen el mismo minitérmino (23), por tanto:

$$d = e$$

Asimismo, se observa que h domina a c y a g, es decir:

$$h \dot{\leq} c \text{ y } h \dot{\leq} g$$

Finalmente, la función reducida está dada por:

$$F(A, B, C, D, E) = a + b + d + f + h$$

Siguiendo el mismo procedimiento que en el ejemplo anterior, los *implicantes primos* resultante quedan finalmente:

$$a = \overline{CD} \quad , \quad b = \overline{BCE} \quad , \quad d = \overline{ABCE} \quad , \quad f = \overline{ABCD} \quad , \quad h = \overline{ABDE}$$

EJEMPLO 2. Determine la expresión *mínima*, como una *suma* de productos, de la siguiente función de conmutación, utilizando el método de Quine-McCluskey.

$$F(A, B, C, D) = \sum_m (3, 4, 7, 9, 10) + \sum_x (0 - 2, 13 - 15)$$

SOLUCIÓN

Obsérvese que la función contiene términos *indiferentes* o *irrelevantes*. Sin embargo, el *proceso* de reducción es igual al seguido en el ejemplo 1, con excepción de la tabla de *implicantes primos*, en la cual no deben intervenir los términos *indiferentes*.

La TABLA 1 se forma con los *minitérminos* y los términos *indiferentes* y se continúa en las tablas sucesivas con el proceso de reducción, siguiendo los pasos y reglas de ejemplo 1.

TABLA 1

m_i	# de UNOS
0	0
1	1
3	2
4	1
7	3
9	2
10	2
13	3
14	3
15	4

TABLA 2

# de UNOS	m_i			
0	0	$\bar{0}$		
1	1	$\bar{0}$	$\bar{0}$	
	2	$\bar{0}$		$\bar{0}$
	4	$\bar{0}$		

2	3	0	0	0				
	9	0			0			
	10		0			0		
3	7			0			0	
	13				0			0
	14					0		0
4	15					0	0	0

TABLA 3

NIVEL DE AGRUPACIÓN	COMBINACIÓN	DIFERENCIA				
		8	4	2	1	
0-1	0-1				x	0
	0-2			x		0
	0-4		x			*j
1-2	1-3			x		0
	1-9	x				*i
	2-3				x	0
	2-10	x				*h
2-3	3-7		x			*g
	9-13		x			*f
	10-14		x			*e
3-4	7-15	x				*d
	13-15			x		*c
	14-15				x	*b

TABLA 4

NIVEL DE AGRUPACIÓN	COMBINACIÓN	DIFERENCIA				
		8	4	2	1	
0-1-2	0-1-2-3			x	x	*a

Como se indicó, para la tabla de *implicantes primos* sólo se consideran los *minitérminos*, ya que estos son los que deben generarse, excluyendo los términos *indiferentes*.

TABLA 5

*	m_i				
	3	4	7	9	10
a	0				
b					
c					
d			0		
e					0
f				0	
g	0		0		
h					0
i				0	
j		0			

De la **TABLA 5**, se observa que los *minitérminos* que no fueron cubiertos son **3, 7, 9 y 10** y los *implicantes primos* que no han sido considerados son **a, d, e, f, g, h e i**. Los

implicantes primos **b** y **c** no se incluyen puesto que son combinaciones de términos *indiferentes*.

La **TABLA 6** se obtiene con los *minitérminos* e *implicantes primos* que no fueron considerados.

TABLA 6

*	m_i			
	3	7	9	10
a	0			
b				
c				
d		0		
e				0
f			0	
g	0	0		
h				0
i			0	

De la tabla anterior se observa que **g** contiene a **a** y **d**, por lo que debe formar parte de la *función reducida*. Asimismo, **f** e **i** contienen al minitérmino **9**, por lo que puede tomarse a cualquiera de los dos; en forma similar **e** y **h** contienen al minitérmino **10**, pudiendo elegirse a alguno de los dos.

Finalmente, la *función reducida* queda en la forma:

$$F(A, B, C, D) = (e \circ h) + (f \circ i) + g + j$$

La determinación de los *implicante primos* (en función de **A**, **B**, **C** y **D**) resultantes, se obtienen de la **TABLA 7**.

TABLA 7

*	A	B	C	D	
e	1	x	1	0	$AC\bar{D}$
h	x	0	1	0	$\bar{B}C\bar{D}$
f	1	x	0	1	$A\bar{C}D$
i	x	0	0	1	$\bar{B}\bar{C}D$
g	0	x	1	1	$\bar{A}CD$
j	0	x	0	0	$\bar{A}\bar{C}\bar{D}$

$$F(A, B, C, D) = (A\bar{B}\bar{D} \circ \bar{B}C\bar{D}) + (A\bar{C}D \circ \bar{B}C\bar{D}) + \bar{A}CD + \bar{A}\bar{C}\bar{D}$$

F(A, B, C, D) puede tomar otra forma al combinar sus términos **e**, **f**, **g** y **j** algebraicamente y suponiendo que se cuenta con compuertas **O EXCLUSIVA**, en la siguiente forma:

$$F(A, B, C, D) = A(\bar{C}\bar{D} + \bar{C}D) + \bar{A}(CD + \bar{C}\bar{D}) = A(C \oplus D) + \bar{A}(\bar{C} \oplus \bar{D}) = \overline{A \oplus (C \oplus D)}$$